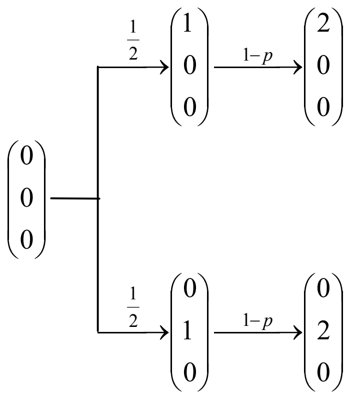
総合演習 29

解法 1

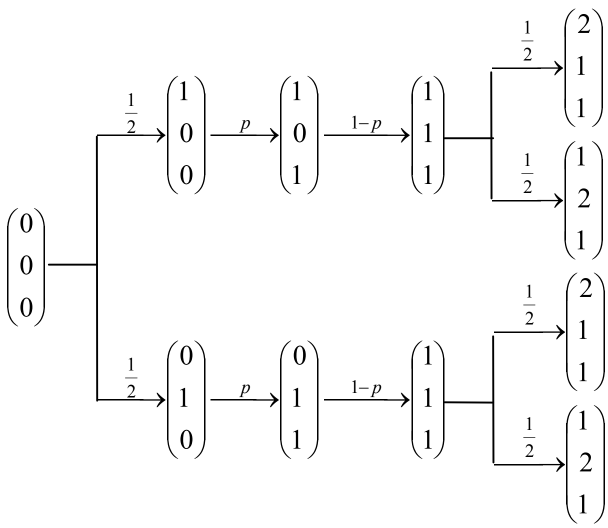
$\begin{pmatrix} \text{Aの勝数} \\ \text{Bの勝数} \\ \text{Cの勝数} \end{pmatrix}$ と表す。

(1)



よって，$2\times\dfrac{1}{2}(1-p)=1-p$

(2)



よって，$4\times\dfrac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\dfrac{1}{2}=p(1-p)$

(3)

対戦回数は 2 または 3 または 4 である。

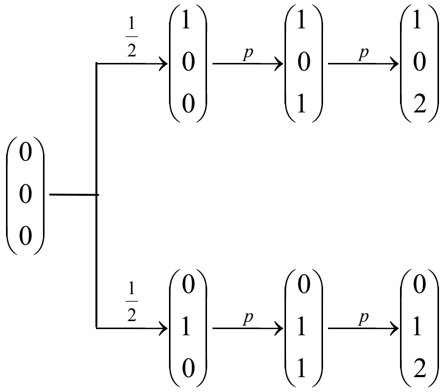
対戦回数が 2 のとき

(1)より，A が優勝する確率＝B が優勝する確率＝$\dfrac{1-p}{2}$，C が優勝する確率＝0

対戦回数が 4 のとき

(2)より，A が優勝する確率＝B が優勝する確率＝$\dfrac{p(1-p)}{2}$，C が優勝する確率＝0

対戦回数が 3 のとき



より，A が優勝する確率＝B が優勝する確率＝0，C が優勝する確率＝$2\times\dfrac{p^2}{2}=p^2$

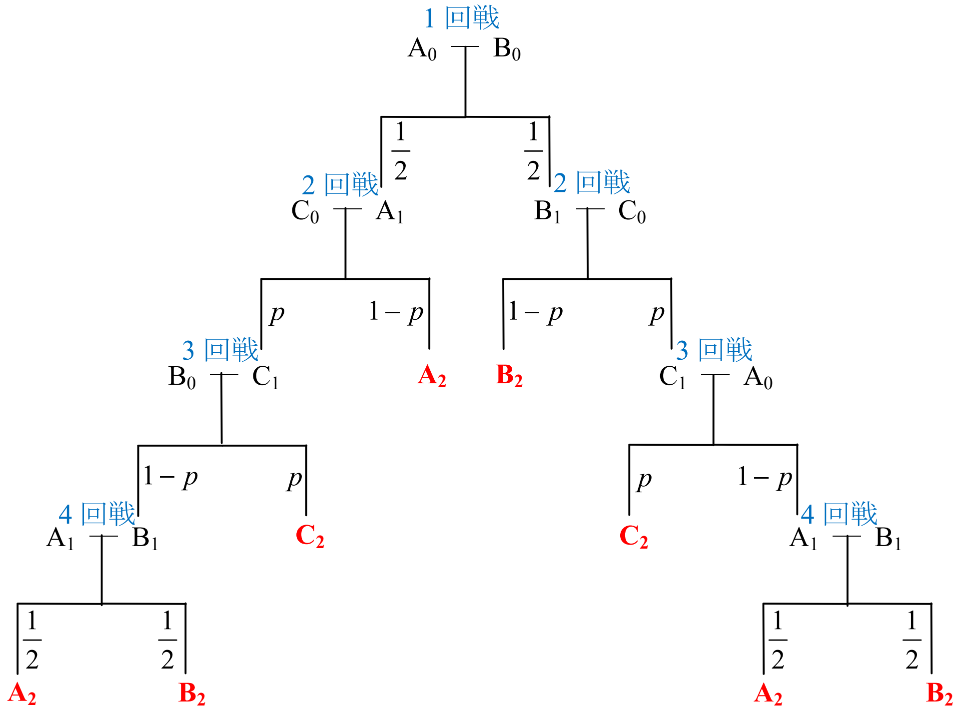
以上より，

A が優勝する確率＝B が優勝する確率＝$\dfrac{1-p}{2}+\dfrac{p(1-p)}{2}+0=\dfrac{1-p^2}{2}$

C が優勝する確率＝$0+0+p^2=p^2$

よって，$\dfrac{1-p^2}{2}=p^2$ より，$p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解法 2



(1)

2 回の対戦で優勝するのは A または B だから，

$\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)=1-p$ ・・・(答)

(2)

2 回の対戦で優勝するのは A または B だから，

$\left\{\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}\right\}=p(1-p)$ ・・・(答)

(3)

C が優勝する確率$=\frac{1}{2}\cdot p\cdot p+\frac{1}{2}\cdot p\cdot p=p^2$ ・・・①

よって，A または B が優勝する確率$=1-p^2$

A と B は勝つ確率について対等であり，1 回戦で A と B が対戦することから，

A が優勝する確率＝B が優勝する確率$=\frac{1-p^2}{2}$ ・・・②

よって，$p^2=\frac{1-p^2}{2}=\frac{1}{3}$ $\therefore p=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ・・・(答)

補足

A（B）が優勝する確率を直接求めると，

$$\frac{1}{2}\cdot(1-p)+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot p\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(1-p)+\frac{1}{2}p\cdot(1-p)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-p^2\right)$$